

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ, ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ НОРМАЛЬНЫХ МОД И ПРОБЛЕМА ФЕРМИ, ПАСТА И УЛАМА

Сергей Флаж

1. Введение

Одна из основных задач физики конденсированных сред заключается в характеристике свойств возбуждений данной системы. Обычное квазичастичное возбуждение, как известно, может быть получено с помощью резонансного взаимодействия с внешними переменными полями. В то время как для квантовых систем сложность проявляется в правильном описании многочастичных волновых функций, то в классической нелинейной динамике многочастичных систем трудности могут возникнуть уже на более ранней стадии, так как необходимо определить классы траекторий в фазовом пространстве, эволюция которых будет описывать интересные возбуждения. Поскольку типичная классическая гамильтонова система неинтегрируема, то почти для всех начальных условий она будет вести себя хаотично на достаточно больших временах. Гамильтонов хаос на больших временных шкалах описывает распад возбуждений, а сами возбуждения характеризуются более регулярными траекториями. Действительно, Колмогоров, Арнольд и Мозер (КАМ) показали, что регулярная динамика на инвариантных N -мерных торах выживает во многих неинтегрируемых системах с конечным числом степеней свободы N . Однако при устремлении этого числа к бесконечности возникают проблемы, ибо частотные спектры могут стать сплошными, и тогда расходящиеся малые знаменатели приводят к исчезновению КАМ-торов. Выход простой - необходимо рассматривать низкоразмерные структуры, аналогичные КАМ-торам. Самая простая из них - это периодическая орбита (ПО). Хорошо известно, что ПО существуют в сильно хаотических системах и даже плотно заполняют хаотические фазовые объемы, несмотря на то, что имеют меру ноль. Именно периодические орбиты и являются самыми естественными регулярными траекториями, описывающими возбуждения даже в макроскопических случаях. Примером таких возбуждений служат дискретные бризеры. Это периодические решения нелинейных решеточных систем, локализованные в прямом пространстве и существующие в бесконечных решетках [1]. Отметим, что дискретные бризеры характеризуются конечной энергией возбуждения.

2. Проблема Ферми, Паста и Улама

Энрико Ферми, Джон Паста и Станислав Улам в 1953 году рассмотрели задачу о перераспределении энергии между нормальными модами ангармонической атомной цепочки и опубликовали результаты во внутреннем отчете национальной лаборатории в Лос Аламосе [2]. Уравнения движения цепочки описывают N частиц с нелинейным взаимодействием между ближайшими соседями, содержащим либо квадратичные (α -ФПУ модель),

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \alpha[(x_{n+1} - x_n)^2 - (x_n - x_{n-1})^2] \quad (1)$$

либо кубические члены (β -ФПУ модель)

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \beta[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3]. \quad (2)$$

Переменные $x_n(t)$ описывают смещения n -той частицы из соответствующего положения равновесия. Рассматриваются жесткие граничные условия $x_0 = x_{N+1} = 0$. Каноническое преобразование

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N Q_q(t) \sin\left(\frac{\pi q n}{N+1}\right)$$

позволяет диагонализировать и решить линейную задачу $\alpha = \beta = 0$ при помощи координат нормальных мод $Q_q(t)$. Модовое число $q = 1, \dots, N$ определяет соответствующие частоты нормальных мод $\omega_q = 2 \sin(\pi q/2(N+1))$. Уравнения движения принимают вид

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\alpha}{\sqrt{2(N+1)}} \sum_{l,m=1}^N \omega_q \omega_l \omega_m B_{q,l,m} Q_l Q_m \quad (3)$$

для α -ФПУ цепочки (1) и

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\beta}{2(N+1)} \sum_{l,m,n=1}^N \omega_q \omega_l \omega_m \omega_n C_{q,l,m,n} Q_l Q_m Q_n \quad (4)$$

для β -ФПУ цепочки (2). Коэффициенты взаимодействия

$$B_{q,l,m} = \sum_{\pm} (\delta_{q \pm l \pm m, 0} - \delta_{q \pm l \pm m, 2(N+1)}), \quad (5)$$

$$C_{q,l,m,n} = \sum_{\pm} (\delta_{q \pm l \pm m \pm n, 0} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, 2(N+1)} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, -2(N+1)}) \quad (6)$$

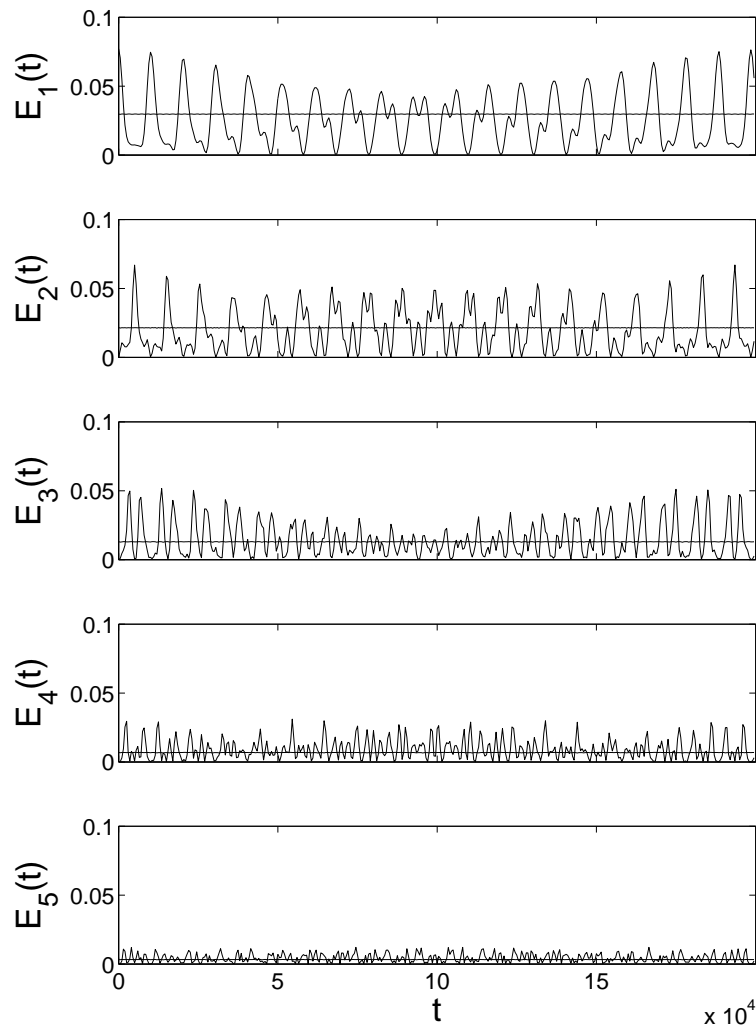


Рис. 1: Эволюция энергий мод $q = 1, 2, 3, 4, 5$ для (i) траектории ФПУ (осциллирующие кривые) и (ii) точной ПО типа QВ (горизонтальные линии). Параметры $\alpha = 0.25$, $E = 0.077$, $N = 32$. [3]

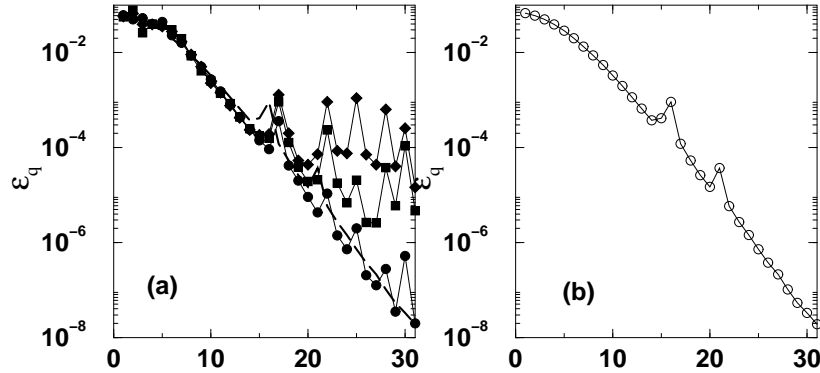


Рис. 2: (а) Распределения плотностей энергий мод для траектории ФПУ и параметров $q_0 = 1, N = 31, \alpha = 0.33, E = 0.32$. Кружки - $t = 10^4$, квадраты - $t = 10^5$, ромбы - $t = 10^6$. Штриховая линия - QВ из (b) для сравнения. (b) Распределения плотностей энергий мод для QВ и параметров из (а). [4]

связывают нелинейным образом нормальные моды и не имеют характерного радиуса взаимодействия в пространстве мод. В отсутствии этого взаимодействия имеется N интегралов движения, которые соответствуют энергиям нормальных мод $E_q = \frac{1}{2} (\dot{Q}_q^2 + \omega_q^2 Q_q^2)$.

ФПУ рассмотрели эволюцию нелинейной цепочки с начальными условиями, когда возбуждена только самая низкочастотная мода $q_0 = 1$. Ожидалось, что через сравнительно короткое время (порядка нескольких периодов осцилляции возбужденной моды) начнут возбуждаться другие моды, и в итоге энергия распределится равномерно по всем модам. Таким образом Ферми ожидал обнаружить переход к тепловому равновесию, с которым мы сталкиваемся в повседневной жизни. Вместо этого ФПУ обнаружили в точности обратную картину (Рис.1). Энергия остается локализованной на нескольких низкочастотных модах, а также видны возвраты почти всей энергии в исходно возбужденную моду на временах, существенно меньших чем характерные времена цикла Пуанкаре для всей системы. Последующие исследования показали, что существуют пороги значения исходной энергии, а также размера системы, выше которых может быть достигнуто равномерное распределение (см. например [5]).

На Рис.2 показаны распределения плотностей энергий мод $\epsilon_q = E_q/N$ для более высокой затравочной энергии в логарифмическом

масштабе, на временах $t = 10^4, 10^5, 10^6$. Поскольку энергии мод зависят от времени, плотности усреднены на предшествующем интервале времени $\Delta t = 10^4$. Во-первых, очевидно, что локализация энергии в пространстве мод экспоненциальная, и такое распределение устанавливается на довольно малом временном масштабе τ_1 . Во-вторых, видна медленная резонансная накачка мод на краю распределения, которая ведет систему в равновесие на большом временном масштабе $\tau_2 \gg \tau_1$. Вышеупомянутые пороги представляют собой значения энергии, на которых временной масштаб накачки края распределения становится сравнимым со временем установления самого распределения $\tau_2 \approx \tau_1$ [5]. Ниже этих порогов временные масштабы разведены, и эволюция на временах $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$ соответствует наблюдениям ФПУ. В то время как ФПУ стояли перед проблемой, как объяснить отсутствие равномерного распределения, т.е. эргодичности, более поздние исследования позволяют ставить следующие вопросы: "Почему существуют два разных временных масштаба, как оценить длину локализации и как она связана со временными масштабами, сохраняется ли этот эффект в пределе бесконечно большой системы, а также при переходе к двух- и трехмерным системам?"

3. Периодические орбиты - q -breathers

Предположим, что траектория ФПУ на временах $t \ll \tau_2$ находится вблизи периодической орбиты (ПО). Тогда эволюция будет почти регулярной, что и наблюдается в расчетах. Следует ожидать, что такая ПО будет соответствовать слегка деформированной нормальной моде. Как было показано в работах [3,6], существует строгая схема построения такой ПО, начиная с простого линейного предела $\alpha = \beta = 0$. Рассматривается траектория с заданной энергией E и возбуждением только одной моды с модовым числом q_0 . Нетрудно убедиться, что эта схема однозначно выделяет периодическую орбиту в многомерном фазовом пространстве системы. Далее воспользуемся фактом отсутствия резонансов

$$\omega_q \neq n\omega_{q_0} \quad (7)$$

для всех целых n и $q \neq q_0$ [7]. В работе [3] используется теорема Ляпунова [8] и доказывается, что исходная ПО продолжает существовать при учете нелинейных членов и фиксированной энергии E . Полученная ПО вовлекает в свою динамику большое количество нормальных мод. Распределение модовых амплитуд и модовых энергий экспоненциально локализовано (см. Рис.1 и 2(b)). По аналогии

с дискретными бризерами эти решения получили название q -breather (QB), подчеркивая что решение является периодическим во времени и локализованным в пространстве мод.

Численные методы построения QB описаны в работах [3,6]. Они используют тот факт, что в обобщенных отображениях (сечениях) Пуанкаре ПО соответствует неподвижной точке. Произвольно выбранная начальная точка отобразится на другую точку, и компоненты вектора невязки являются функциями компонент начальной точки. Обобщенный метод Ньютона используется для нахождения нулей всех компонент вектора невязки и, следовательно, для нахождения неподвижной точки - ПО.

3.1. Результаты для α -ФПУ модели, низкие частоты

Применение метода теории возмущения Пуанкаре-Линдштедта для низкочастотных мод приводит к оценке распределения энергий нормальных мод на QB [6]:

$$E_{nq_0} = \gamma^{2n-2} n^2 E_{q_0}, \quad \gamma = \frac{\alpha \sqrt{E_{q_0}} (N+1)^{3/2}}{\pi^2 q_0^2}, \quad (8)$$

Необходимое условие для локализации QB в рамках этой оценки - $\gamma < 1$. Следовательно, уравнения (8) позволяют получить оценки для порога локализации и для соотношений подобия между параметрами QB, оставляющими γ неизменным. Обратная длина локализации ξ^{-1} пропорциональна $q_0^{-1} \ln \gamma$. При условии $\gamma = 1$ QB делокализуется, и следовательно $\tau_2 \approx \tau_1$. На Рис.3 показаны численные результаты. Полученные QB решения линейно устойчивы [3,6]. Отметим, что вопрос динамической устойчивости ПО, по всей видимости, не имеет прямого отношения к проблеме ФПУ. Действительно, если QB локализован, то ощутимая неустойчивость на краях распределения энергии исключена - в противном случае соответствующие резонансы привели бы к делокализации самой ПО. Неустойчивость в центре распределения приведет к перестройке динамики в центре, но в силу отсутствия резонансов на краях не приведет к делокализации.

В прямом пространстве распределения энергии делокализованы как для траектории ФПУ, так и для QB, и не отличаются особенностями [3,6].

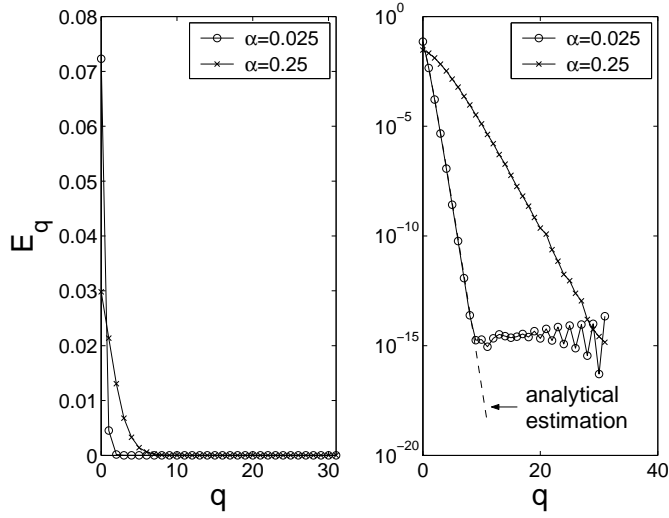


Рис. 3: Устойчивые QB для $\alpha = 0.025$ и $\alpha = 0.25$, $E = 0.077$, $N = 32$, $q_0 = 1$. Прерывистая линия - результат (8). [6]

3.2. Результаты для β -ФПУ, низкие частоты

Применение теории возмущения Пуанкаре-Линдштедта для низкочастотных мод приводит к оценке распределения энергий нормальных мод на QB [6]:

$$E_{(2n+1)q_0} = \lambda^{2n} E_{q_0}, \quad \lambda = \frac{3\beta E_{q_0} (N+1)}{8\pi^2 q_0^2}. \quad (9)$$

Необходимое условие для локализации QB - $\lambda < 1$. Обратная длина локализации ξ^{-1} пропорциональна $(2q_0)^{-1} \ln \lambda$. При условии $\lambda = 1$ QB делокализуется, и следовательно $\tau_2 \approx \tau_1$. На Рис.4 показаны численные результаты. QB становятся неустойчивыми при условии $6\beta E(N+1)/\pi^2 > 1$ [6]. Поскольку сами решения при этом превосходно локализованы, то траектории ФПУ не приводят к делокализации [9], в согласии с вышеизложенным.

3.3. Результаты для высоких частот

Локализация наблюдается также и для случая затравочного волнового числа с большой частотой. На Рис.5 представлены распределения энергии для траектории ФПУ и для QB [4]. Единственное

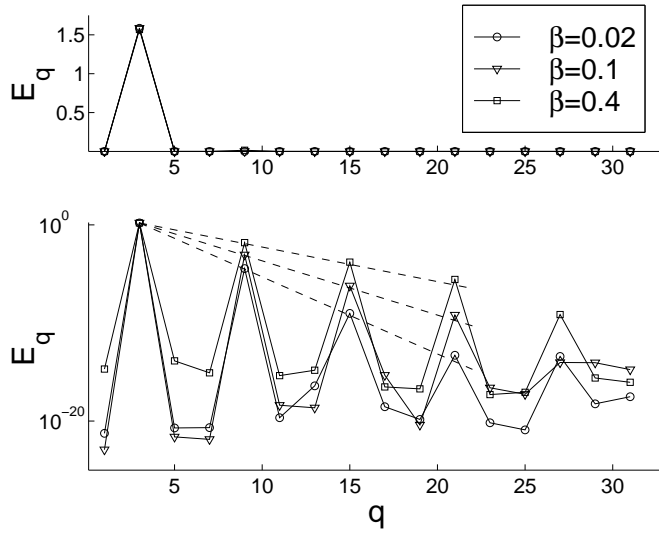


Рис. 4: QВ для разных β и $E = 1.58$, $N = 32$, $q_0 = 3$. Прерывистые линии - результат (9). [6]

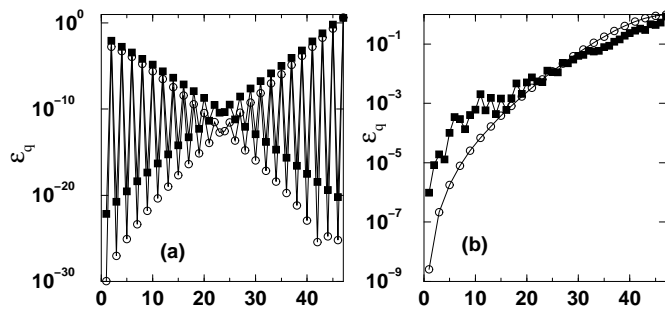


Рис. 5: Распределения плотностей энергии для траектории ФПУ (квадраты, $t = 10^5$) и QВ (кружки) при $N = 47$, $E = 4.7$, $q_0 = 47$. (a) $\alpha = 0.25$; (b) $\beta = 0.25$. [4]

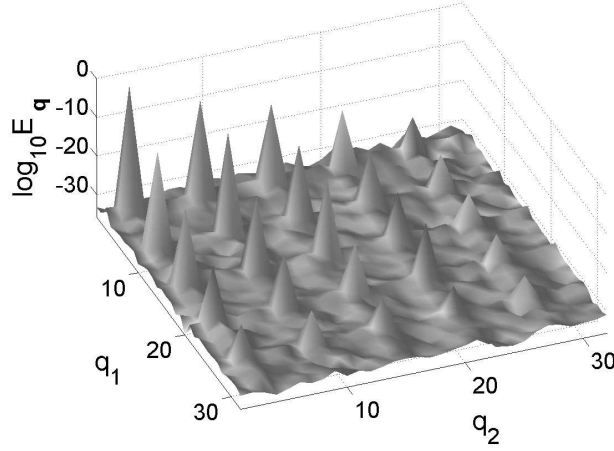


Рис. 6: Распределения энергии для QВ в двумерной ФПУ решетке при $N = 32 \times 32$, $E = 1.5$, $\mathbf{q}_0 = (3, 3)$, $\beta = 0.5$. [10]

отличие от случая низких частот заключается в том, что для α -ФПУ модели происходит попарное возбуждение высокой и низкой частот, что следует из теории возмущения [4].

4. Обобщения на решетки с размерностью $d = 2, 3$

Основное условие для продолжения QВ заключалось в отсутствии резонансов (7). Поскольку бесконечная система имеет сплошной спектр частот нормальных мод, выполнение условия (7) не представляется возможным. Конечная система в прямом пространстве имеет дискретный спектр, и теорема Ляпунова применима. Естественным обобщением вышеизложенных результатов является рассмотрение конечных систем с размерностью $d = 2, 3$. В таком случае модовые числа становятся векторами с d компонентами. В работе [10] были получены QВ решения для $d = 2, 3$. Основные свойства решений цепочки оказываются применимыми и здесь. На Рис. 6 показан пример QВ решения для двумерной решетки.

Для β -ФПУ модели получено обобщение теории возмущения, предсказывающее следующее распределение энергий мод:

$$E_{(2n+1)\mathbf{q}_0} = \lambda_d^{2n} E_{\mathbf{q}_0}, \quad \lambda_d = \frac{3\beta E_{\mathbf{q}_0} N^{2-d}}{2^{2+d} \pi^2 |\mathbf{q}_0|^2}. \quad (10)$$

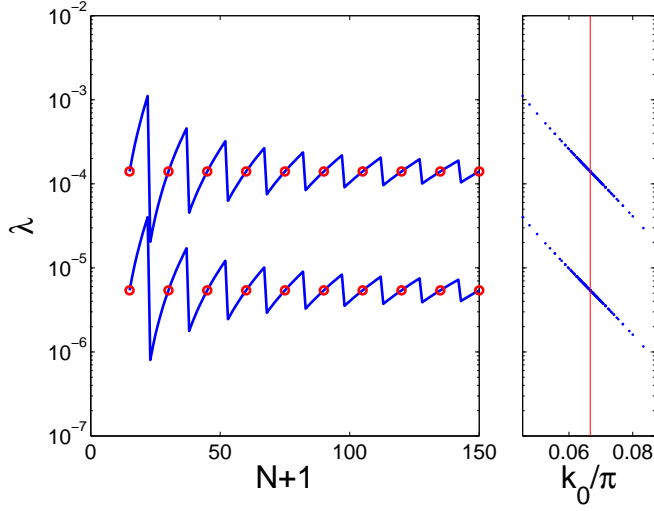


Рис. 7: Зависимость параметра λ от размера цепочки (левая диаграмма) для QВ при плотности энергии $\epsilon = 4 \cdot 10^{-4}$ (нижняя кривая) и $2 \cdot 10^{-3}$ (верхняя кривая) и $\beta = 1$. Символы соответствуют $N + 1 = r(N_0 + 1)$, $N_0 = 15$, где r - целое число. На правой диаграмме показана зависимость λ от соответствующего волнового числа k_0 для данных из левой панели. [11]

Численный анализ QВ показывает количественное согласие с этими оценками [10].

5. Преобразования подобия и переход к макроскопическим системам

Из результатов теории возмущения (8),(9),(10) следует, что при переходе от экстенсивных величин (энергии E и модового числа q) к интенсивным величинам (плотности энергии $\epsilon = E/N$ и волновому числу $k = \pi q/(N + 1)$) длина локализации перестает зависеть от размера системы N . Следовательно можно ожидать, что QВ будут существовать в пределе бесконечно больших, т.е. макроскопических, систем. Ниже мы обсудим метод получения точных ПО решений путем r -кратного увеличения размера системы. Оказывается, что предельный переход от дискретного к сплошному спектру нормальных мод не влияет на результаты.

В работе [11] было установлено, что достаточно получить QВ решение $Q_q(t)$ для конечной цепочки с размером N . Рассмотрим новую цепочку с размером $\tilde{N} + 1 = r(N + 1)$, где $r = 2, 3, 4, \dots$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\tilde{Q}_{\tilde{q}}(t) = \begin{cases} \sqrt{r}Q_q(t), & \tilde{q} = rq \\ 0, & \tilde{q} \neq rq \end{cases}, \quad (11)$$

является решением новой цепочки.

Фиксируя r и повторяя эту схему бесконечно много раз, либо просто устремляя r в бесконечность, получим решения в бесконечно больших, а значит макроскопических, системах. Преобразования подобия легко обобщаются на случай $d = 2, 3$, а также на свободные и периодические граничные условия [11].

5.1. Зависимость длины локализации QВ от волнового числа в макроскопической системе

Предположим что QВ существуют в бесконечно большой цепочке. Тогда результат (9) принимает следующий вид:

$$\ln \epsilon_k = \left(\frac{k}{k_0} - 1 \right) \ln \sqrt{\lambda} + \ln \epsilon_{k_0}, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{3\beta \epsilon_{k_0}}{8 k_0^2}. \quad (12)$$

Для проверки рассмотрим исходную цепочку с $N_0 = 15$, и положим $\bar{k}_0 = \pi/15$. Плавно увеличивая размер системы, будем получать QВ решения численно. В качестве затравочного модового числа q_0 берется целое число, ближайшее к значению $\bar{k}_0(N + 1)/\pi$. Из полученного решения оценим коэффициент λ , используя соотношение $\epsilon_{5q_0}/\epsilon_{3q_0}$ (Рис. 7). Результаты подтверждают независимость полученного значения λ от размера цепочки для $N + 1 = r(N_0 + 1)$. Каждому модовому числу при данном размере N соответствует волновое число k_0 в некой окрестности \bar{k}_0 . Плавная зависимость $\lambda(k_0)$ подтверждает вышеизложенные предположения для макроскопических систем.

5.2. Закон подобия для длины локализации QВ и особенности на краях частотного спектра

При фиксированной плотности энергии ϵ и выполнении закона (9) следует $\epsilon_{k_0} = (1 - \lambda)\epsilon$. Используя (12) получим, что обратная длина локализации $\xi^{-1} = |S|$ задается абсолютным значением величины S ,

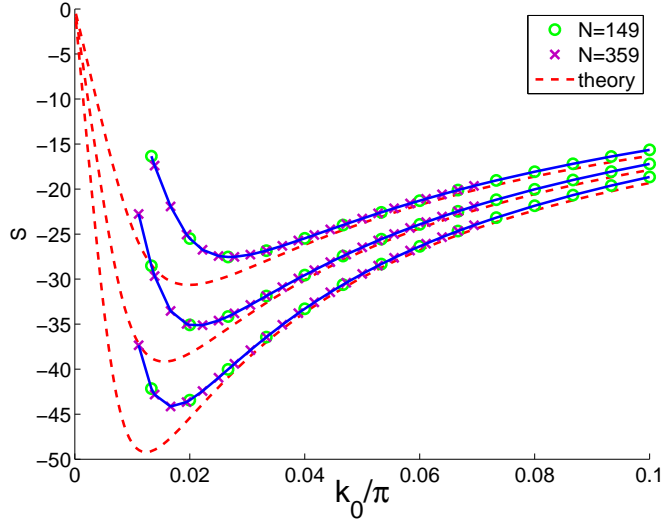


Рис. 8: $S(k_0)$ при $\beta = 1$ и $\epsilon = 6.08 \cdot 10^{-4}, 9.6 \cdot 10^{-4}, 1.57 \cdot 10^{-3}$ (штрихованные линии, снизу вверх). Символы и связывающие линии: результаты оценки численных решений QB для $N = 149$ и $N = 359$. [11]

описывающей наклон распределения плотностей энергий в логарифмическом масштабе:

$$S = \frac{1}{k_0} \ln \sqrt{\lambda}, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + 4\nu^4/k_0^4} - 1}{2\nu^2/k_0^2}, \quad \nu^2 = \frac{3\beta}{8}\epsilon. \quad (13)$$

S зависит от затравочного волнового числа k_0 и от одного эффективного параметра нелинейности ν , содержащего произведение плотности энергии ϵ и коэффициента β . Длина локализации расходится при $k_0 \rightarrow 0$ и принимает наименьшее значение $\xi_{min} \approx \nu/0.7432$ при $k_0 \approx 2.577\nu$. С увеличением ν , длина локализации при $k_0 = k_{min}$ растет. В пределе $k_0 \gg \nu$ имеет место оценка $S \approx 2/k_0 \ln(\nu/k_0)$, а при $k_0 \ll \nu$ получаем $S \approx -k_0/(2\nu^2)$. На Рис.8 проведено сравнение аналитических и численных результатов. Прекрасно подтверждается вывод о независимости длины локализации от размера системы, а также наличие минимума $S(k_0)$, зависимость его глубины и положения от плотности энергии. Систематические различия при малых k_0 связаны с поправками к теории возмущений.

Из результата (13) следует, что величина $S_m(z) = \nu S$ зависит лишь от одной переменной - безразмерного затравочного волново-

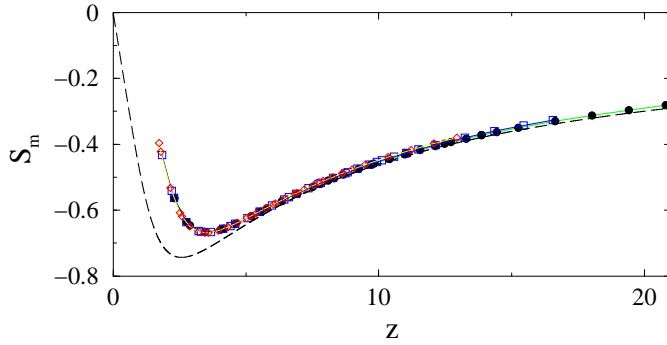


Рис. 9: $S_m(z)$ (штрихованная линия). Символы и связывающая линия: обезразмеренные результаты оценки численных решений QВ из рис. 8. [11]

го числа $z = k_0/\nu$. На Рис. 9 показана зависимость $S_m(z)$, а также обезразмеренные численные данные из Рис. 8. Несмотря на систематические отклонения на малых z , обнаружено, что все численные данные ложатся на одну кривую. Таким образом, подтверждается наличие закона подобия. Функция $S_m(z)$ описывает степень локализации QВ для выбранных плотностей энергии, параметра нелинейности, затравочного модового числа и размера системы. Аналогичные результаты получены для α -ФПУ модели, а также для затравочных волновых чисел с частотами вблизи верхнего края спектра ω_q .

6. Обсуждение результатов

Причиной полной делокализации QВ на краях спектра являются частотные резонансы. Следовательно ожидается, что для макроскопической системы возбужденная мода с волновым числом вблизи края спектра будет быстро распадаться на другие моды, поскольку $\tau_2 \approx \tau_1$. Из полученных результатов следует, что существует целый интервал волновых чисел около краев спектра, где наступает практически полная делокализация. Действительно, неприводимая часть спектра ω_q ограничена по k (в случае цепочки на величину π). О локализации в пространстве волновых чисел можно говорить только, когда $\xi < \pi$. Это условие определяет критическое расстояние Δk_0 затравочного волнового числа k_0 от границы спектра. При ненулевом значении $\nu \sim \beta\epsilon$ величина Δk_0 будет также ненулевой. Следовательно имеется целый диапазон значений k_0 когда возбуждение нормальной моды

быстро распадется, и нормальная мода практически не определена. При росте ν диапазон Δk_0 также растет, и при некотором критическом значении ν получим $\Delta k_0 \approx \pi$, т.е. нормальные моды более не характеризуют динамику системы независимо от значения волнового числа. Это соответствует режиму сильного взаимодействия между модами, который будем называть турбулентным режимом, по аналогии с гидродинамикой. При малых значениях ν турбулентность наступает только для волновых чисел вблизи краев спектра.

Интересно отметить, что в квантовом режиме однофононных низкочастотных возбуждений ангармонизм приводит к распаду фонона на более низкие по частотам фононы. Легко убедиться в том, что классический предел, соответствующий возбуждению многофононного состояния с данной частотой, приведет в ведущем порядке к слиянию двух или трех фононов в один фонон с более высокой частотой, в согласии с изложенными результатами. Также отметим, что в классической макроскопической системе, при нулевой плотности энергии все нормальные моды (фононы) обретают бесконечное время жизни, ибо $\xi \rightarrow 0$. Следовательно известная теория квазичастиц Ландау дополняется новыми свойствами этих возбуждений в классическом пределе.

Вернемся к обсуждению результатов для конечных систем. При данном ν мы имеем конечное значение Δk_0 . Конечная система предполагает дискретный набор волновых чисел для нормальных мод. Теплопроводность ангармонической цепочки обуславливается динамикой низкочастотных волн. Чтобы в численных расчетах обнаружить хорошо определенных фононов, необходимо разрешить турбулентный режим, а следовательно выбрать достаточно большой размер системы, превышающий $N_c \sim 1/(\Delta k_0)$. Изложенная теория позволяет получить соответствующие количественные оценки.

В заключение отметим, что вышеупомянутая теория возмущения Пуанкаре-Линдштедта применима в диапазоне частот, где дисперсионное соотношение ω_q может быть описано разложением, включающее ведущий и следующий за ним члены. Соответственно результаты распространяемы, по крайней мере, на половину всей неприводимой зоны. Следовательно, распад нормальной моды в турбулентном режиме не ограничен диапазоном Δk_0 , а происходит во всем частотном спектре.

Наконец обратим внимание на резонансные пики на краях распределений на Рис. 2, как для траектории ФПУ, так и для QB. В работе [4] получено количественное объяснение возникновения и расположения этих пиков. Они вызваны тем, что для соответствующих

модовых чисел почти выполняется равенство в (7). Легко убедиться в том, что пики возникают в верхней половине частотного спектра, а также только в случае низкочастотной затравочной моды. Для объяснения необходимо учесть дисперсионное соотношение более точно. Численные эксперименты показывают, что именно эти резонансные пики приводят к переходу в равновесие. Остается загадкой, каков путь к равновесию для высокочастотных затравочных мод, где очевидно, что аналогичные пики отсутствуют.

Благодарность Представленные результаты были получены совместно с М. В. Иванченко, О. И. Канаковым, К. Г. Мишагиным и Т. Пенати. Я благодарен им, а также В. Флерову, Б. Альтшулеру, В. Д. Шалфееву за полезные обсуждения и А. Ярьсько за техническую помощь.

Литература

1. *Campbell D.K., Flach S., Kivshar Yu.S.* Localizing energy through nonlinearity and discreteness // *Phys. Today* 2004. V.57, Nr.1.P.43-49.
2. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonlinear problems. I // Los Alamos Report LA-1940, 1955.
3. *Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I.* q -breathers in Fermi-Pasta-Ulam chains: existence, localization, and stability // *Phys. Rev. E* 2006. V.73, P.036618-1-14.
4. *Penati T., Flach S.* Tail resonances of FPU q -breathers and their impact on the pathway to equipartition // *nlin.PS/0610006*, 2006.
5. *Berchiarella L., Giorgilli A., Paleari S.* Exponentially long times to equipartition in the thermodynamic limit // *Phys. Lett. A* 2004. V.321, P.167-172.
6. *Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I.* q -breathers and the Fermi-Pasta-Ulam problem // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V.95, P.064102-1-4,
7. *Conway J.H., Jones A.J.* Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity) // *Acta Arith.* 1976. V.XXX, P.229-240.
8. *Lyapunov M.A.* The general problem of stability of motion. London: Taylor & Francis, 1992.
9. *De Luca J., Lichtenberg A., Lieberman M.A.* Time scale to ergodicity in the Fermi-Pasta-Ulam system // *Chaos* 1995. V.5, P.283-297.
10. *Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Mishagin K.G., Flach S.* q -breathers in finite two- and three-dimensional nonlinear acoustic lattices // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V.97, P.025505-1-4.
11. *Kanakov O.I., Flach S., Ivanchenko M.V., Mishagin K.G.* Scaling properties of q -breathers in nonlinear acoustic lattices // *nlin.PS/0607019* 2006.